Μαθημα 21ο 29/5/2017

Απει 4

Παρατηρηση

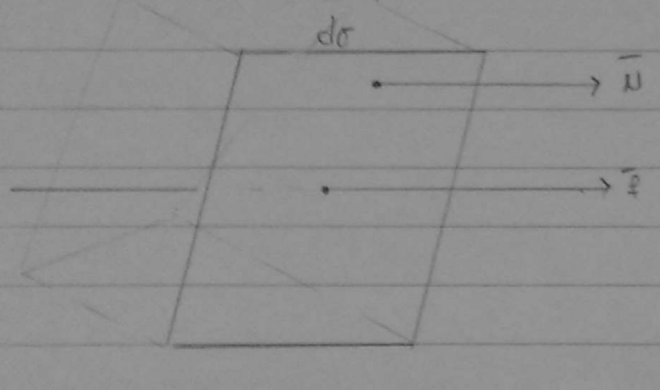
α) Ενα επιφανειακο ολοκληρωμα πραγματικης συναρτησης $\int_S f\, d\sigma$ μπορει να ερμηνευθει ως η συνολικη μαζα της επιφανειας $S \subset \mathbb{R}^3$ αν $f: S \to \mathbb{R}$ ειναι η δεδομενη πυκνοτητα μαζας που δινει ανα μοναδα εμβαδου τη μαζα στο σημειο $(x,y,z) \in S$

β) Ενα επιφανειακο ολοκληρωμα ενος διανυσματικου πεδιου $\bar{f}: S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ μπορει να εφαρμοσθει ως εξης

Εστω $d\sigma$ το τμημα μιας επιφανειας στον $\mathbb{R}^3$ και εστω ρευστου

Αν $d\sigma$ ειναι ενα ορθογωνιο τμημα επιπεδου τοτε ανα μοναδα χρονου dt απο το $d\sigma$ περνα η ποσοτητα ρευστου

$$\frac{\text{ογκος } dV}{\text{χρονος } dt} = \underbrace{\bar{f} \cdot \bar{N}}_{\text{η συνιστωσα της ταχυτητας πανω στο } d\sigma \text{ στη κατευθυνση } \bar{N}} \underbrace{d\sigma}_{=\text{εμβαδο}}, \quad \text{οπου } \bar{N} \perp d\sigma$$



Εδω $\bar{f} \parallel \bar{N}$ σε χρονο dt περνα απο το $d\sigma$ ο ογκος $dV = \bar{f} \cdot \bar{N}\, dt\, d\sigma$

Γενικη περιπτωση

$\int_{\Phi} \bar{f} \cdot \bar{n}\, d\sigma =$ ο ογκος (η ποσοτητα) του ρευστου που περναει απο την επιφανεια Φ ανα μοναδα χρονου γ) Ερμηνεία της απόκλισης: Έστω $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ τότε ο αριθμός

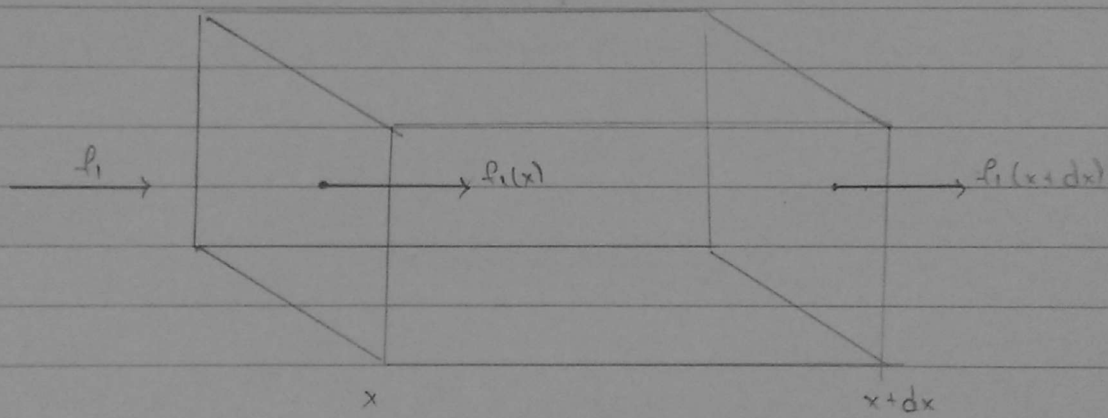
$$\nabla \cdot \bar{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) =: \operatorname{div}\bar{f}(x,y,z)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f\right)$$

Ερμηνεία

Έστω ένα ρευστό ταχύτητας. Το f_1 είναι η συνιστώσα της ταχύτητας στην κατεύθυνση $(1,0,0)$ (με f_1 να εξαρτάται για απλότητα από το x)



Από την κάθετη επιφάνεια στα αριστερά εισέρχεται σε χρόνο dt ποσότητα ρευστού $f_1(x)\,dt\,dy\,dz$ και από την επιφάνεια στα δεξιά εξέρχεται ποσότητα $f_1(x+dx)\,dt\,dy\,dz$ $\Rightarrow$ Συνολικά στο «κουτί» του σχεδίου, εξερχόμενη − εισερχόμενη ποσότητα ρευστού

$$\underbrace{\left(\frac{f_1(x+dx)-f_1(x)}{dx}\right)}_{\approx \frac{\partial f_1}{\partial x}(x)} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}\,dt$$

Scanned by CamScanner

Στα ανα μοναδα χρονου η ποσοτητα αυτη ειναι $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x)\,dx\,dy\,dz$
και ανα μοναδα χρονου και ανα μοναδα ογκου $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x)$
Αναλογα σκεφτομαστε και για f_2, f_3

Θεωρημα Gauss:
Εστω $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ενα C^1 κανονικο χωριο (βλεπε ορισμο πιο κατω) με
συνορο ∂V προσανατολισμενο ετσι ωστε το μοναδιαιο καθετο
να δειχνει προς το εξωτερικο του V και $\bar{f}: V \to \mathbb{R}^3$ ενα
C^1 διανυσματικο πεδιο. Τοτε

$$\int_V \operatorname{div} \bar{f}(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{\partial V} \bar{f} \cdot \bar{n}\, d\sigma$$

Συμφωνα με τα προηγουμενα στο αριστερο ρευστο που
παραγεται στο V ανα μοναδα χρονου στα δεξια ρευστο
που διαπερνα το ∂V ανα μοναδα χρονου

Ορισμος
C^1 κανονικο χωριο στον $\mathbb{R}^3$ = C^1 καν. χωριο ως προς Oxy
Oxz
Oyz

οπου C^1 κανονικο χωριο ως προς Oxy ειναι κανονικο χωριο
ως προς Oxy

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ (x,y) \in K,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$, φ_1, φ_2 συνεχεις
με την επιπλεον απαιτηση (για να ειναι C^1 καν. χωριο ως προς Oxy)
α) το «ταβανι» και το «πατωμα» να παραμετρικοποιουνται ετσι
ωστε το καθε διανυσμα να δειχνει προς τα εξω
β) να ισχυει ο ΚΑΜ για αυτους τους μετασχηματισμους

π.χ.

Κύβοι και άλλα στερεά που προκύπτουν μέσω επιπέδου τομών και μπάλες είναι C^1-καν. χωρία

→ Θεώρημα Stokes συσχετίζει το στροβιλισμό ενός ρευστού επί μιας επιφάνειας με αυτό που συμβαίνει στο σύνορο της

↳ (curl, rot)

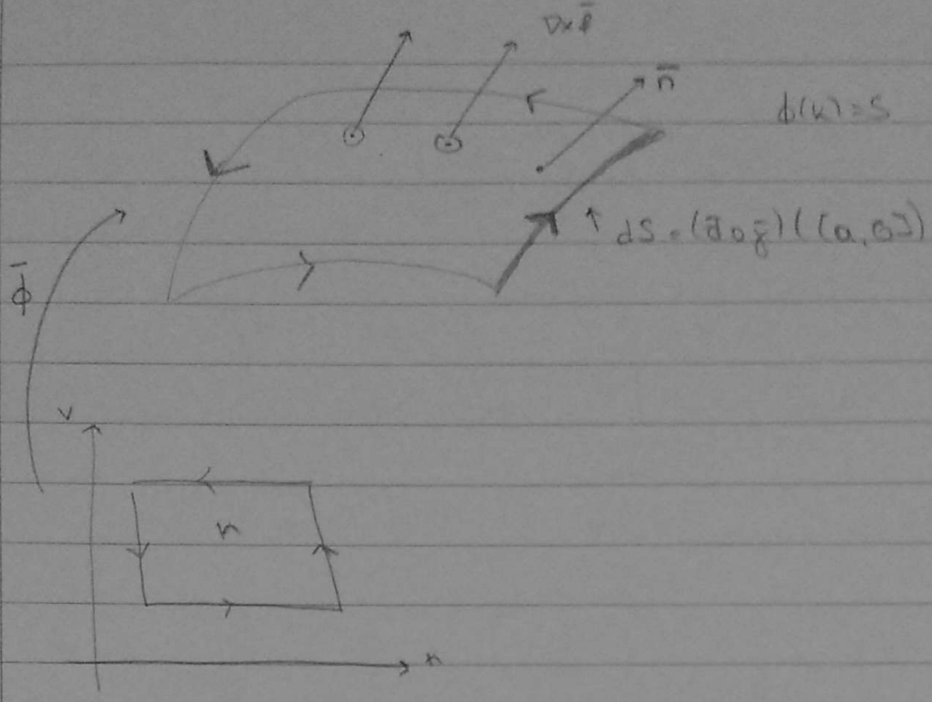
Θεώρημα Stokes

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\bar{\Phi}: U \to \mathbb{R}^3$ μια C^1 επιφάνεια με παραμετρικό πεδίο ένα C^1-κανονικό χωρίο K με θετικά προσανατολισμένο σύνορο $\partial K = \bar{\gamma}([a,b])$ με $\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^2 \subset U$. Έστω επίσης $V \subset \mathbb{R}^3$ ανοιχτό με $\bar{\Phi}(K) \subset V$ και $\bar{f}: V \to \mathbb{R}^3$ C^1

$$\Rightarrow \int_{\bar{\Phi}} \underbrace{\operatorname{curl} \bar{f}}_{=\operatorname{rot} \bar{f} = \nabla \times \bar{f}} \cdot \bar{n} \, d\sigma = \int_{\bar{\Phi} \circ \bar{\gamma}} \bar{f} \cdot d(x,y,z)$$

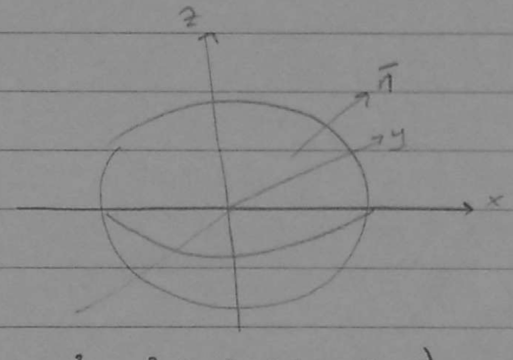
$$\nabla \times \bar{f} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ d_x & d_y & d_z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{dy} f_3 - \frac{d}{dz} f_2 \\ -\frac{d}{dx} f_3 + \frac{d}{dz} f_1 \\ \frac{d}{dx} f_2 - \frac{d}{dy} f_1 \end{bmatrix}$$



Ασκηση (172)

$S \subset \mathbb{R}^3$ η σφαιρα κεντρου $(0,0,0)$ ακτινας $R>0$ και $\bar{n}$ το εξωτερικο μοναδιαιο καθετο στην S. Υπολογιστε με χρηση του Gauss το ολοκληρωμα $I = \int_S (x^3, y^3, z^3) \cdot \bar{n} \, d\sigma$



$$\int_B \overbrace{\nabla \bar{f}(x,y,z)}^{=3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2)} \cdot d(x,y,z) \underset{Gauss}{=} \int_S \underbrace{(x^2, y^2, z^2)}_{=\bar{f}(x,y,z)} \cdot \bar{n} \, d\sigma$$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ και $\partial B = S$

$$\Rightarrow I = 3\int_B (x^2+y^2+z^2)\, d(x,y,z) = 3\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \, r \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr =$$

$$= 12\pi \frac{R^5}{5}$$

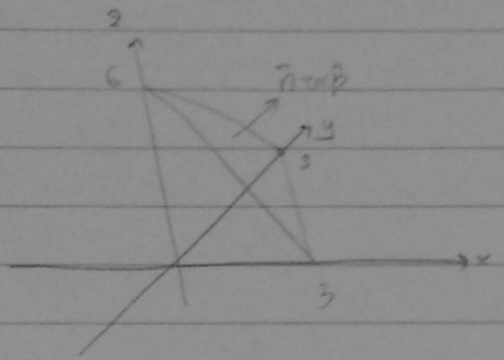
Scanned by CamScanner

Ασκηση 174

Επαληθευση Θεωρ. Gauss για το $\bar{F}(x,y,z) = (2xy+z,\ y^2,\ -x-3y)$
και το $V \subset \mathbb{R}^3$ που περικλειεται απο τα επιπεδα $x=0,\ y=0\ z=0$
και $2x+2y+z=6$

Λυση

$$\int_V (2y+2y+0)\,d(x,y,z) \underset{Gauss}{=} \int_{\partial V} \bar{F}\cdot\bar{n}\,d\sigma$$ οπου $\bar{n}$ το εξωτερικο
μοναδιαιο διανυσμα (καθετο)



για $z=0 \Rightarrow 2x+2y+0=6 \Rightarrow y=3-x$

$\bar{n}_{μπροστα} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\bar{n}_{πατωμα} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\bar{n}_{αριστερα} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{n}_{ταβανι} =$,

«ταβανι» $:= \bar{a}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 6-2x-2y \end{bmatrix}$ $(x,y) \in K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ 0 \le x \le 3$
$0 \le y \le 3-x\}$

$\Rightarrow \bar{N}(x,y)$

$\Rightarrow \bar{n}_{ταβανι} = \dfrac{\bar{N}}{\|\bar{N}\|}$, $I_1 = \int_V (2x+2y+0)\,d(x,y,z) = \int_K \int_0^{6-2x-2y} 4y\,dz\,d(x,y)$

Scanned by CamScanner